EXERCICE N°1 : 30' 5 points

1) Soit f la fonction définie sur $[0 , \pi/2[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans $]\pi/3 , 5\pi/12[$.

2) Soit g la fonction définie sur $[1 , +\infty[$ par $g(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 - 1}$

a) Montrer que g est continue sur $[1 , +\infty[$. **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

3) Soit h la fonction définie sur $[0 , \pi/2[$ par $h(x) = g \circ f(x)$. **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} h(x)$.

b) Montrer que h est continue sur $[0 , \pi/2[$. **c)** Montrer que $h(\alpha) = 1 + 2\sqrt{2}$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 \sin(2/x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{-x^2}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2}{x+1}$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) Déterminer la limite de f en 0. En déduire un prolongement par continuité de f en 0.

2) a) Montrer que f est continue sur $]0 , +\infty[$. **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3) Soit g la fonction définie sur $]1 , +\infty[$ par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

a) Montrer que g est continue sur $]1 , +\infty[$. **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. **b)** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Définir ce prolongement.

2) a) Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x} + 1}$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty , 0[$ et déterminer $f(]-\infty , 0[)$.

3) Soit g la fonction définie sur $]-\infty , 0[$ par $g(x) = \tan(\pi f(x))$.

a) Montrer que g est continue sur $]-\infty , 0[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = -2$ admet une seule solution $\alpha \in]-3 , -2[$.